LOGIK

Wir haben drei Abbildungen für Wahrheitswerte wahr (w) und falsch (f):

$$\text{NICHT}\quad \begin{array}{c|cc} & w & f \\ \hline \neg\cdot & f & w \end{array} \qquad \text{UND}\quad \begin{array}{c|cc} \cdot\wedge\cdot & w & f \\ \hline w & w & f \\ f & f & f \end{array} \qquad \text{ODER}\quad \begin{array}{c|cc} \cdot\vee\cdot & w & f \\ \hline w & w & w \\ f & w & f \end{array}$$

Diese können kombiniert werden, um Dinge zu sehen wie:

$$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b) \qquad \text{oder} \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Hiermit können wir insbesondere den Folgepfeil definieren als:

$$(a \Rightarrow b) = (\neg a \vee b) \qquad \text{als Tabelle:} \quad \begin{array}{cc|ccl} & a \Rightarrow b & w & f & \leftarrow a \\ \hline b \rightarrow & w & w & w & \\ & f & f & w & \end{array}$$

Beachte, daß hiernach aus etwas Falschem *alles* gefolgert werden kann: „Wenn der Mond größer als die Erde ist, bekomme ich volle Punktzahl in der Klausur," ist eine korrekte Aussage, die nicht zu einem Widerspruch führen kann. Eine kurze Überlegung zeigt, daß die eventuell vermutete symmetrischere Wahrheitstabelle für den Folgepfeil eigentlich die des Äquivalenzpfeiles ist:

$$\begin{aligned} & (a \Leftrightarrow b) \\ = \; & (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \\ = \; & (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a) \\ = \; & ((\neg a \vee b) \wedge \neg b) \vee ((\neg a \vee b) \wedge a) \\ = \; & ((\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg b)) \vee ((\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a)) \\ = \; & (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \end{aligned} \qquad \begin{array}{c|cc} a \Leftrightarrow b & w & f \\ \hline w & w & f \\ f & f & w \end{array}$$

Zusammen mit den Verneinungen für die Quantoren $\forall$ und $\exists$

$$\neg(\forall x\ P(x)) = \exists x\ \neg P(x) \qquad \neg(\exists x\ P(x)) = \forall x\ \neg P(x)$$

folgt beispielsweise für die Verneinung der Stetigkeitsbedingung an eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$:

$$\begin{array}{rllll} & \neg(\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 & \forall x \in D & & |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \ \varepsilon) \\ \Longleftrightarrow & \quad \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 & \exists x \in D & \neg(& |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \ \varepsilon) \\ \Longleftrightarrow & \quad \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 & \exists x \in D & & |x - x_0| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(x_0)| \geq \ \varepsilon \end{array}$$

ssp-web@earthlingsoft.net