

## INTERNE KATEGORIEN

Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  ist gegeben durch ihre Objekte  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , ihre Morphismen  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ , sowie durch die Quell- und Zielabbildungen  $s, t : \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$ , die Identitätsabbildung  $i : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$  und die assoziative Komposition  $\circ : \text{Mor}(\mathcal{C})_s \times_t \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$ , die verträglich mit den Identitätsmorphis-  
 men ist.

Diese ‚Definition‘ des Begriffs Kategorie ist ungenau, da sie nicht angibt, was  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  sind. Für eine genaue Definition müßten hier Klassen oder Universen erwähnt werden. Beschränkt man sich aber auf Fälle, in denen  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  Mengen sind, sind die verwandten Objekte wohldefiniert und man spricht von einer *kleinen Kategorie*.

Eine kleine Kategorie ist also eine Kategorie, deren Objekte und Morphismen durch ein Objekt in der Kategorie der Mengen gegeben sind und in der die Abbildungen  $s, t, i$  sowie die Komposition  $\circ$  Morphismen in der Kategorie der Mengen sind. Ersetzt man hier die Kategorie der Mengen durch eine beliebige Kategorie, erhält man den allgemeineren Begriff der internen Kategorie.

**Definition.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Dann ist eine *interne Kategorie  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{C}$*  gegeben durch Objekte  $\text{Ob}(\mathcal{D})$  und  $\text{Mor}(\mathcal{D})$  in  $\mathcal{C}$  sowie Morphismen  $s, t, i, \circ$  in  $\mathcal{C}$ , die die Kategorienaxiome erfüllen.

Interne Kategorien existieren nicht in jeder Kategorie. Insbesondere muß in  $\mathcal{C}$  das Pullback Objekt  $\text{Mor}(\mathcal{D})_s \times_t \text{Mor}(\mathcal{D})$  existieren, damit eine Komposition definiert werden kann. Ein naheliegendes Beispiel sind kleine Kategorien als interne Kategorien in der Kategorie der Mengen. Pullbacks existieren in der Kategorie der Gruppen und man kann interne Kategorien in der Kategorie der Gruppen finden, die *2-Gruppen* genannt werden.

**Beispiel.** Sei  $G$  eine Gruppe. Dann ist durch das Gruppoid mit  $G$  als Automorphismenmenge des einzigen Objektes und der Multiplikation als Komposition eine 2-Gruppe gegeben.

**Beispiel.** Sei  $G$  eine Gruppe und definiere  $\mathcal{D}$  durch:

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{D}) &= \text{Aut}(G) & \text{Mor}(\mathcal{D}) &= G \times \text{Aut}(G) \\ s : (g, \varphi) &\mapsto \varphi & t : (g, \varphi) &\mapsto \text{inn}_g \cdot \varphi & i : g &\mapsto (1, g) \\ \circ : ((g_2, \varphi_2), (g_1, \varphi_1)) &\mapsto (g_2 g_1, \varphi_1), \end{aligned}$$

wobei  $\text{inn}_g$  der zu  $g$  gehörende innere Automorphismus von  $G$  ist. Die Objekte sind Gruppen, die verwandten Abbildungen sind Gruppenmorphis-  
 men und die Kategorienaxiome sind erfüllt. Es handelt sich also um eine 2-Gruppe.

Interne Kategorien sind insbesondere Kategorien. Morphismen von internen Kategorien sind *interne Funktoren*, d.h. Funktoren, deren Abbildungen auf Objekt- und Morphismenebene Morphismen in  $\mathcal{C}$  sind. Ebenso gibt es *interne natürliche Transformationen* zwischen internen Funktoren, bei denen wiederum alle Abbildungen Morphismen in  $\mathcal{C}$  sein müssen.

Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen erfüllen die Axiome für eine *2-Kategorie*. Folglich bilden auch interne Kategorien in  $\mathcal{C}$  als Objekte, interne Funktoren in  $\mathcal{C}$  als Morphismen und interne natürliche Transformationen in  $\mathcal{C}$  eine 2-Kategorie. Ist  $\mathcal{C}$  die Kategorie der Gruppen, sprechen wir dann von der 2-Kategorie der 2-Gruppen.

#### LITERATUR

Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory, Kapitel 8.

Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998, Abschnitt XII.1.

*aufgeschrieben von Sven-S. Porst*  
*ssp-web@earthlingsoft.net*