

KNOBELEIEN

1. Wir haben gelernt, daß die Mengen $[0, 1]$ und $]0, 1[$ gleichmächtig sind. Das heißt, sie können bijektiv aufeinander abgebildet werden. Wie kann eine solche Bijektion aussehen?
2. Gibt es eine injektive stetige Abbildung zwischen $[0, 1]$ und $]0, 1[$? Gibt es surjektive stetige Abbildungen zwischen diesen Mengen? (Beide Abbildungsrichtungen betrachten.) Falls ja, gib eine solche Abbildung an. Falls nein, weshalb kann es keine geben? Kann die Bijektion aus der ersten Knobelei stetig sein?
3. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ stetig. Kann f dann zu einer stetigen Abbildung auf ganz \mathbf{R} ausgedehnt werden? D.h. gibt es eine stetige Abbildung $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$? Wie verhält es sich wenn anfangs eine Abbildung $g :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ gegeben ist? Jeweils konkret die Ausdehnung hinschreiben oder ein nicht stetig ausdehnbares Gegenbeispiel angeben.
4. Wo ist die folgende Abbildung stetig?

$$\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbf{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \\ & \text{mit } p, q \text{ positiv und teilerfremd.} \end{cases}$$

5. Sei $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Abbildung. Für $x \in \mathbf{Q}$ kennen wir die Werte $f(x)$ der Abbildung. Zeige, daß wir dann auch alle übrigen Werte kennen. Was sagt uns das über die Beziehung zwischen den rationalen und reellen Zahlen?
6. Seien f_n die Fibonacci Zahlen mit $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Man kann zeigen, daß die Aussage $m|n \Rightarrow f_m|f_n$ gilt. (Diese Aussage hat nichts mit Analysis zu tun.)
7. Sei $\chi_{\mathbf{Q}}$ die *charakteristische Funktion* der rationalen Zahlen. $\chi_{\mathbf{Q}}$ bildet rationale Zahlen auf 1 und irrationale Zahlen auf 0 ab. Definiere damit Abbildungen $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit $f(x) = x\chi_{\mathbf{Q}}(x)$ und $g(x) = x^2\chi_{\mathbf{Q}}(x)$. Untersuche f und g auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$.
8. Benenne jeden der Buchstaben: $\alpha \beta \gamma \delta \zeta \eta \vartheta \iota \kappa \lambda \mu \nu \omicron \pi \rho \tau \upsilon \varphi \chi \omega$. Welche vier Buchstaben fehlen in der Liste? Schreibe die dazugehörigen Großbuchstaben auf.